Beispiel für eine klassische Kurvendiskussion (ganzrationale Funktion)

Version 1.1

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Offizielle Lösung mit Minimaltext	Parallel zur Reinschrift überlegt man sich	Bemerkungen und weitere Tipps

Ableitungen

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$f''(x) = 6x - 2$

$f'''(x) = 6$

Ableitungen gleich am Anfang, dann kommt man später nicht durcheinander …

Definitionsmenge

$D = \mathbb{R}$

Bei ganzrationalen Funktionen ist immer $D = \mathbb{R}$, außer D ist durch die **Sachsituation** *(Bsp.: »x: Anzahl der verkauften Produkte«)* eingeschränkt.

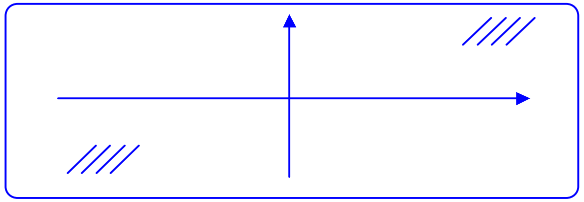
Symmetrie

nicht erkennbar

Bei ganzrationalen Funktionen gibt es einfache Regeln, allgemein muss sonst $f(-x)$ genauer untersucht werden …

Verhalten am Rand

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$



Falls die Definitionsmenge eingeschränkt ist, wird natürlich der sich dadurch ergebende Rand betrachtet.

Achsenschnittpunkte

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 1$

Nullstellen:

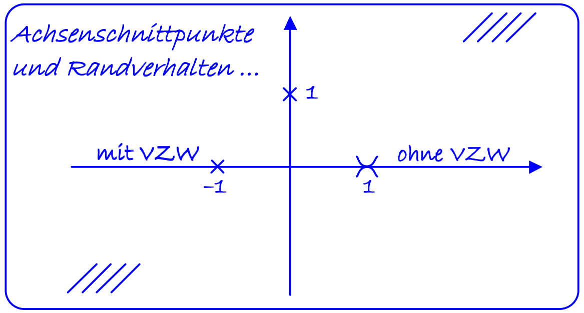
- Durch Probieren findet man die Nullstelle $x = 1$
- Bestimmen weiterer Nullstellen:

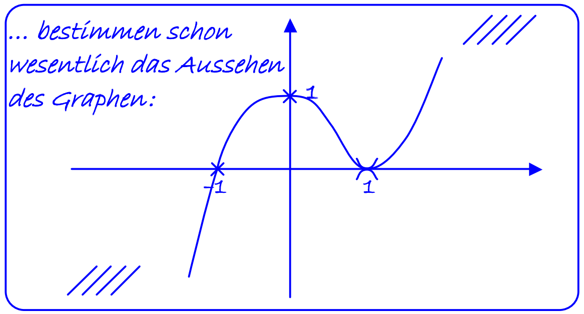
$$
\begin{array}{l}
(x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) = x^2 - 1 \\
-\underline{(x^3 - x^2)} \\
\qquad 0 \quad -x + 1 \\
\qquad\quad -(\underline{-x + 1}) \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Durch eine kurze Überlegung *(oder mit der p-q-Formel oder mit der 3. Binomischen Formel)* erhält man für $x^2 - 1$ die Nullstellen 1 und -1 und damit: $x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$

- Also gilt: $f(x) = (x-1)^2\cdot(x+1)$
- Die Funktion hat also
  - eine <u>Nullstelle ohne VZW bei x=1</u>
  - eine <u>Nullstelle mit VZW bei x=−1</u>

  <u>Weitere Nullstellen gibt es nicht.</u>





Ein weiteres Beispiel für die korrekte Schreibweise bei einer Nullstellenbestimmung [für $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$]:

Nullstellen:

$$
\begin{array}{ll}
 & g(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & x^3 - x^2 - 2x = 0 \\
\Leftrightarrow & x = 0 \;\vee\; x^2 - x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow & x = 0 \;\vee\; x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\
\Leftrightarrow & x = 0 \;\vee\; x = 2 \;\vee\; x = -1
\end{array}
$$

Es gibt also <u>genau drei Nullstellen ohne VZW bei x=−1, x=0 und x=2</u>.

Man achte darauf, dass die Nullstelle $x = 0$ in jeder Zeile wieder auftaucht, damit die Äquivalenz zur ersten Zeile erhalten bleibt. Die Äquivalenzpfeile dürfen (bei mir) auch weggelassen werden.

Extrempunkte

Kandidaten: Notwendig für das Vorliegen eines lokalen Extrempunktes ist $f'(x) = 0$

d.h. $3x^2 - 2x - 1 = 0$

d.h. $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$

d.h. $x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{3}{9}}$

d.h. $x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$

d.h. Nur an den Stellen $-\frac{1}{3}$ oder 1 können lokale Extrempunkte vorliegen.

Hinreichende Bedingung: Es gilt

- $f''(-\frac{1}{3}) = -4 < 0$, also **HP**$(-\frac{1}{3} | \frac{32}{27}) \approx$ HP$(-0{,}33|1{,}19)$ und
- $f''(1) = 4 > 0$, also **TP(1|0)**.

Aus den bisherigen Überlegungen ist schon vor der Untersuchung klar:
• Bei x = 1 liegt ein Tiefpunkt (Nullstelle ohne VZW)
• Zwischen −1 und 1 liegt ein Hochpunkt
Mehr als zwei Extrema kann eine ganzrationale Funktion dritten Grades auch nicht haben!

Wenn sich aus anderen Hinweisen (siehe linker Kasten) die Existenz von Hoch- und Tiefpunkten zweifelsfrei ergibt, kann auf das Überprüfen mit dem hinreichenden Kriterium verzichtet werden.

Beliebter Fehler: Bei der Angabe der y-Koordinaten von den gefundenen Extremwerten muss der gefundene x-Wert in f(x) eingesetzt werden. Man darf nicht das gerade bestimmet f''(x) einsetzen.

Grundsätzlich sind **exakte Werte** (Bruchdarstellung, Wurzel) zu benutzen, ein Näherungswert wird nur für das spätere Skizzieren des Graphen angegeben.

Wendepunkte

Kandidaten: Notwendig für das Vorliegen eines Wendepunktes ist $f''(x) = 0$ d.h. $6x - 2 = 0$ d.h. $x = \frac{1}{3}$ ist einziger WP-Kandidat

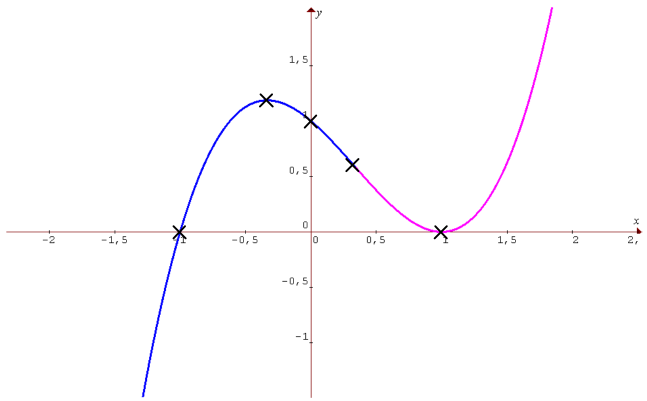
Hinreichende Bedingung: Es gilt $f'''(\frac{1}{3}) = 6 \neq 0$,

also **WP** $(\frac{1}{3} | \frac{16}{27}) \approx$ WP$(0{,}33|0{,}59)$

Zwischen dem Hoch- und dem Tiefpunkt muss ein Wendepunkt liegen. Mehr Wendepunkte kann eine ganzrationale Funktion dritten Grades auch nicht haben!

Falls ein WP auch schon EP-Kandidat war, handelt es sich um einen **Sattelpunkt**.

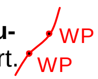
Graph



Das Koordinatensystem sollte **nicht zu klein** sein (größer als hier!).

Die **markanten Punkte** (Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte) **einzeichnen**.

Dann sollte man versuchen, **vom Rand (Wendepunkt) zum Wendepunkt (Rand)** in jeweils **einem Rutsch** zu zeichnen. Dadurch wird in der Zeichnung der Wechsel des Kurvenverhaltens deutlich.
Man sollte aufpassen, dass man **keine zusätzlichen Kurvenwechsel** hineinzaubert.



Der Graph darf **keine doppelten Linien** besitzen.